Научная статья
УДК 512.54
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-22-32

КРИТЕРИЙ ИЗОМОРФИЗМА $GBS(n,1)$ ГРУПП С НЕТРИВИАЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ

Федор Анатольевич Дудкин

Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

DudkinF@gmail.com;https://orcid.org/0000-0002-4775-7962

Аннотация

Конечно порожденную группу G_n, которая действует на дереве T так, что все рёберные стабилизаторы – бесконечные циклические группы, а все вершинные стабилизаторы – свободные абелевы группы ранга n, будем называть *обобщенной группой Баумслага–Солитера типа (n,1)* ($GBS(n,1)$ группа). Недавно автором были найдены необходимые условия изоморфизма таких групп с нетривиальным центром. В данной работе мы дополняем эти условия до критерия. Предложенные условия могут быть проверены алгоритмически.

Ключевые слова и фразы

обобщенная группа Баумслага–Солитера, проблема изоморфизма, группа с нетривиальным центром.

Источник финансирования

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00119, https://rscf.ru/project/24-11-00119/

Для цитирования

Дудкин Ф. А. Критерий изоморфизма $GBS(n,1)$ групп с нетривиальным центром // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 22-32. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-22-32

Isomorphism criterion for $GBS(n,1)$ groups with non-trivial center

Fedor A. Dudkin

Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

DudkinF@gmail.com;https://orcid.org/0000-0002-4775-7962

Abstract

A finitely generated group G_n that acts on a tree T such that all edge stabilizers are infinite cyclic groups and all vertex stabilizers are free Abelian groups of rank n will be called a *generalized Baumslag–Solitar group of type (n,1)* ($GBS(n,1)$ group). Recently, the author found necessary conditions for the isomorphism of such groups with a non-trivial center. In this paper, we extend these conditions to a criterion. The proposed conditions can be verified algorithmically.

Keywords

generalized Baumslag–Solitar group, isomorphism problem, group with non-trivial center.

Funding

The work was supported by Russian Science Foundation (project 24-11-00119), https://rscf.ru/project/24-11-00119/

For citation

Dudkin F. A. Isomorphism criterion for $GBS(n,1)$ groups with non-trivial center // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 22-32. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-22-32

Введение

По теореме Басса-Серра всякая $GBS(n,1)$ группа G_n представляется в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группы графа групп $\mathbb{A}$ [1], все рёберные группы которого бесконечные циклические, а все вершинные – свободные абелевы группа ранга n. $GBS(1,1)$ группа называется *обобщенной группой Баумслага–Солитера (GBS группа)*. Проблема изоморфизма $GBS(n,1)$ групп даже при $n=1$ решена лишь в некоторых частных случаях и остается сложной открытой проблемой. Обзор результатов можно найти, например, в [2].

В работе [3] был предложен критерий наличия нетривиального центра для $GBS(n,1)$ групп. Кроме того, оказалось, что всякая $GBS(n,1)$ группа G_n с нетривиальным центром может быть задана следующим копредставлением. Если v вершина A, то обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_n$ порождающие соответствующей вершинной группы. Обозначим через $\overline{A}$ граф, полученный из A отождествлением e и $\overline{e}$. Максимальное поддерево R графа $\overline{A}$ определяет копредставление группы $\pi_1(\mathbb{A}) \simeq G_n$

$$\left\langle \begin{array}{l} v_1, \ldots, v_n \ (v \in V(A)), \\ t_e \ (e \in E(\overline{A}) \setminus E(R)) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1^{\lambda_e} = u_1^{\lambda_{\overline{e}}} \ (e = (u,v) \in E(R)), \\ v_i v_j = v_j v_i \ (1 \leqslant i \neq j \leqslant n, v \in V(A)), \\ t_e^{-1} v_1^{\lambda_e} t_e = u_1^{\lambda_{\overline{e}}} \ (e = (u,v) \in E(\overline{A}) \setminus E(R)) \end{array} \right\rangle,$$

где $\lambda_e, \lambda_{\overline{e}}, e \in E(A)$ это целые ненулевые числа.

Более того, подгруппа $G = \langle v_1 \ (v \in V(A)), t_e \ (e \in E(\overline{A}) \setminus E(R)) \rangle$ группы G_n является GBS группой. В работе [3] она называется соответствующей GBS подгруппой группы G_n. Основной результат работы [3] – необходимое условие изоморфизма $GBS(n,1)$ групп с нетривиальным центром.

Теорема 1. [3, теорема 1] *Если G_n и H_n две изоморфные $GBS(n,1)$ группы с нетривиальным центром и $n \geqslant 3$, то и их соответствующие GBS подгруппы G и H тоже изоморфны.*

Отметим, что указанное выше копредставление соответствует графу с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где A граф, а $\lambda\colon E(A) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – метки на ребрах. Если v начало ребра e, то $v_1^{\lambda(e)}$ – образ порождающего реберной группы в соответствующей вершинной. Будем писать, что ребро e является (λ, μ)-ребром, понимая, что метки на геометрическом ребре $\{e, \overline{e}\}$ равны λ и μ. Кроме того, если вершинные группы $\mathbb{A}$ заменить на бесконечные циклические, то получится граф с метками соответствующей GBS подгруппы группы G_n.

Несложно понять, что упомянутое выше необходимое условие изоморфизма $GBS(n,1)$ групп не является достаточным. На рис. 1 изображены два графа с метками. Пусть $n \geqslant 3$, тогда левый задаёт $GBS(n,1)$ группу

$$G_n \simeq \mathbb{Z}^n \underset{\mathbb{Z}}{*} \mathbb{Z}^n.$$

Обозначим через H_n $GBS(n,1)$ группу $\mathbb{Z}^n$ она может быть задана графом с метками состоящим из одной вершины и без рёбер. Тогда соответствующие GBS группы G и H изоморфны $\mathbb{Z}$. Однако, $G_n \not\simeq H_n$.

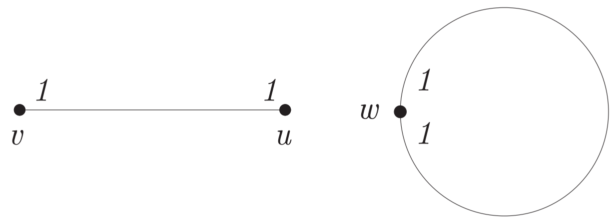

Рис. 1: Пример графов с метками.

На рис. 2 изображено *скольжение* – это преобразование графа с метками. Скольжение не меняет фундаментальную группу графа с метками.

Замечание 1. [3, Замечание 2] Если $GBS(n,1)$ группа G_n имеет нетривиальный центр и представлена графом с метками $\mathbb{A}$, то с помощью скольжений можно получить такой граф с метками $\widehat{\mathbb{A}}$, что $G_n \cong \pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\widehat{\mathbb{A}})$ и метка 1 на ребре встречается в $\widehat{\mathbb{A}}$ только в следующих случаях:

1. рядом с висячей вершиной,

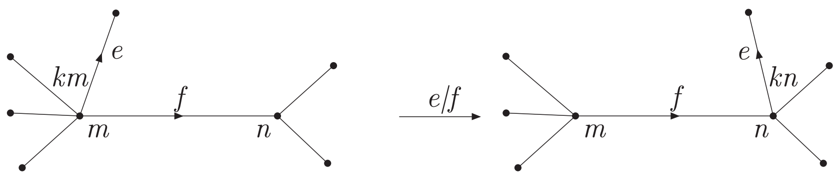

Рис. 2: Скольжение e/f.

2. на (1,1) ребре, одна из вершин которого висячая,

3. на (1,1) петле.

Если граф с метками удовлетворяет этим трём условиям, то будем называть его *приведённым*.

Множество висячих вершин с метками 1 приведённого графа с метками $\mathbb{A}$ будем обозначать $V_{out}(\mathbb{A})$, а остальные $V_{inn}(\mathbb{A})$. Подграф с метками приведённого графа с метками $\mathbb{A}$, полученный из $\mathbb{A}$ удалением вершин $V_{out}(\mathbb{A})$ и соответствующих рёбер, будем обозначать $\mathbb{A}_{inn}$.

Пусть G_n и H_n две $GBS(n,1)$ группы с нетривиальным центром, представленные приведёнными графами с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно. Если $n \geqslant 3$ и $\varphi\colon G_n \to H_n$ изоморфизм, то по лемме 2 [3] изоморфизм φ индуцирует биекцию множеств $V_{inn}(\mathbb{A})$ и $V_{inn}(\mathbb{B})$. Мы обозначим эту биекцию φ_V.

Мы находим такое дополнение необходимых условий теоремы 1, которое дает критерий изоморфизма $GBS(n,1)$ групп с нетривиальным центром.

Теорема 2. *Пусть G_n и H_n две $GBS(n,1)$ группы с нетривиальным центром, представленные приведёнными графами с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно, и $n \geqslant 3$. Группы G_n и H_n изоморфны тогда и только тогда, когда их соответствующие GBS группы G и H изоморфны и соответствующие централизаторы $C_{G_n}(v_1^k)$ и $C_{H_n}(\varphi_V(v)_1^k), k \in \mathbb{Z}, v \in V_{inn}(\mathbb{A})$ изоморфны.*

Замечание 3. Нет необходимости проверять счетное число изоморфизмов централизаторов в теореме 2. В зависимости от приведённого графа с метками $\mathbb{A}$ для каждой вершины из $V_{inn}(\mathbb{A})$ может быть выбрано конечное число натуральных степеней для которых надо проверять изоморфизм централизаторов.

Замечание 4. Предложенные в теореме 2 условия можно проверить алгоритмически.

При $n = 1$ мы имеем дело с проблемой изоморфизма GBS групп с нетривиальным центром. Такие GBS группы обладают тривиальными модулями и, следовательно, не имеют мобильных ребер. Поэтому всякая такая GBS группа может быть представлена только конечным числом редуцированных графов с метками. Это показывает, что проблема изоморфизма таких групп алгоритмически разрешима (см., например, [4]).

При $n = 2$ заключение теоремы 1 не выполняется. Например, на рис. 1 изображены два графа с метками. Если $n = 2$, то они задают $GBS(2,1)$ группы

$$G_2 = \langle v_1, v_2, u_1, u_2 \mid v_1v_2 = v_2v_1, v_1 = u_1, u_1u_2 = u_2u_1\rangle$$

и

$$H_2 = \langle w_1, w_2, t \mid w_1w_2 = w_2w_1, t^{-1}w_1t = w_1\rangle.$$

Отображение $v_1 \mapsto w_1, v_2 \mapsto w_2, u_2 \mapsto t$ продолжается до изоморфизма этих групп, но соответствующие GBS подгруппы G и H не изоморфны. В самом деле, $G \simeq \mathbb{Z}$, а $H \simeq \mathbb{Z}^2$.

§1. Централизаторы некоторых элементов

Будем называть элемент g группы $\pi_1(\mathbb{A})$ *вершинным*, если найдется такая вершина v графа с метками $\mathbb{A}$, что $g \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

Обозначим через $\mathbb{A}_{v,k}$ подграф с метками приведённого графа с метками $\mathbb{A}$, построенный на тех ребрах $e \in E(\mathbb{A})$ для которых v_1^k лежит в соответствующей реберной циклической подгруппе G_e. То есть, $\mathbb{A}_{v,k}$ минимальный подграф с метками приведённого графа с метками $\mathbb{A}$, содержащий указанный набор рёбер.

Лемма 1 (о сопряженности). *Пусть $GBS(n,1)$ группа G_n имеет нетривиальный центр и задана приведённым графом с метками $\mathbb{A}$, $n \geqslant 3$. Если $v \in V_{inn}(\mathbb{A})$, k целое ненулевое число и $h \in G_n$, то элемент $h^{-1}v_1^kh$ вершинный тогда и только тогда, когда $h \in \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$.*

Доказательство леммы 1. Выберем согласованные максимальные поддеревья $\mathbb{A}_{v,k}$ и $\mathbb{A}$. Считаем далее, что $\pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$ и $\pi_1(\mathbb{A})$ заданы соответствующими согласованными копредставлениями.

Сначала докажем, что $C_{G_n}(v_1^k) \supseteq \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$. Если $u \in V(\mathbb{A}_{v,k})$, то найдется такое целое l, что $v_1^k = u_1^l$. Следовательно,

$$\langle u_1, \ldots, u_n\rangle \subseteq C_{G_n}(v_1^k).$$

Если t порождающий второго типа $\pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$, то из согласованности поддеревьев следует, что t является порождающим второго типа $\pi_1(\mathbb{A})$. Если e ребро вне максимального поддерева соответствующее t и $t^{-1}w_1^lt = u_1^m$ соотношение соответствующее e, то из $v_1^k \in G_e$ следует, что $v_1^k = w_1^{ls} = u_1^{ms}$. Это доказывает, что $t \in C_{G_n}(v_1^k)$.

Если $h \in \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$, то $h \in C_{G_n}(v_1^k)$ и элемент $h^{-1}v_1^kh = v_1^k$ вершинный.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 22-32
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 22-32

Докажем теперь, что если элемент $h^{-1}v_1^kh$ вершинный, то $h \in \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$. Пусть это не верно, значит найдется такой $h \in G_n$, что $h^{-1}v_1^kh$ вершинный, h не лежит в $\pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$ и h записан словом минимальной длины в стандартных порождающих.

Случай первый: элемент h можно записать не используя порождающие второго типа, соответствующие ребрам вне $\mathbb{A}_{v,k}$. Тогда найдется такое ребро e и поддерево с метками $\mathbb{T}$ максимального поддерева графа с метками $\pi_1(\mathbb{A})$, что $h \in \pi_1(\mathbb{A}_{v,k}) *_e H$, $H = \pi_1(\mathbb{T})$ и $v_1^k \notin G_e$. Значит

$$h = g_0h_1g_1h_2g_2 \dots h_mg_m, m \geqslant 0,$$

$g_i \in H, h_i \in \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$. Элемент $h^{-1}v_1^kh$ относительно этого свободного произведения с объединением представляется редуцированным словом ненулевой длины, поэтому элемент $h^{-1}v_1^kh$ не может быть вершинным.

Случай второй: Есть такой порождающий второго типа t соответствующий ребру e, который нельзя исключить из записи h и $e \notin E(\mathbb{A}_{v,k})$. Выберем подходящую подгруппу H группы G_n так, чтобы $h \in HNN(H,t)$ и H содержала $C_{G_n}(v_1^k)$. Относительно этого HNN-расширения h примет вид

$$h = h_0t^{\varepsilon_1}h_1 \dots t^{\varepsilon_m}h_m, m \geqslant 1, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}.$$

Тогда элемент

$$h^{-1}v_1^kh = h_m^{-1}t^{-\varepsilon_m} \dots t^{-\varepsilon_1}h_0^{-1}v_1^kh_0t^{\varepsilon_1}h_1 \dots t^{\varepsilon_m}h_m$$

вершинный. Значит $h_0^{-1}v_1^kh_0 \in G_e$ и, следовательно, элемент $h_0^{-1}v_1^kh_0$ вершинный.

Если $h_0 \notin \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$, то это противоречит минимальности длины h.

Если $h_0 \in \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$, то $h_0 \in C_{G_n}(v_1^k)$ и $h_0^{-1}v_1^kh_0 = v_1^k$. Однако, $v_1^k \notin G_e$, значит запись

$$h_m^{-1}t^{-\varepsilon_m} \dots t^{-\varepsilon_1}v_1^kt^{\varepsilon_1}h_1 \dots t^{\varepsilon_m}h_m$$

редуцирована и элемент $h^{-1}v_1^kh$ не может быть вершинным.

Эти противоречия показывают, что $h \in \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$, лемма 1 доказана.

Лемма 2 (о централизаторе). *В условиях леммы о сопряженности*

$$C_{G_n}(v_1^k) = \pi_1(\mathbb{A}_{v,k}).$$

Доказательство леммы 2. Включение $C_{G_n}(v_1^k) \supseteq \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$ доказано в лемме о сопряженности.

Докажем обратное включение. Если $h \in C_{G_n}(v_1^k)$, то элемент $h^{-1}v_1^kh = v_1^k$ вершинный, значит по лемме о сопряженности $h \in \pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$. Лемма 2 доказана.

§2. Графы с метками изоморфных $GBS(n,1)$ групп с нетривиальными центрами

В этом параграфе считаем $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ приведёнными графами с метками. Обозначим через $NB_{v,k}(\mathbb{A}), B_{v,k}(\mathbb{A})$ и $T_{v,k}(\mathbb{A})$ число вершин $\mathbb{A}_{v,k}$ не лежащих в $\mathbb{A}_{inn}$, лежащих в $\mathbb{A}_{inn}$ и число ребер вне максимального поддерева $\mathbb{A}_{v,k}$ соответственно (аналогично для $\mathbb{B}$).

Порождающие v_1 $(v \in V(A))$ группы G_n, упомянутые в замечании 1, будем называть порождающими *I типа.* Множество таких порождающих будем обозначать I_A.

Лемма 3. *Пусть G_n и H_n две $GBS(n,1)$ группы с нетривиальным центром, представленные приведёнными графами с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно, и $n \geqslant 3$. Если соответствующие GBS группы G и H изоморфны, $k \in \mathbb{Z}, v \in V_{inn}(\mathbb{A})$ и соответствующие централизаторы $C_{G_n}(v_1^k)$ и $C_{H_n}(\varphi_V(v)_1^k)$ изоморфны, то $NB_{v,k}(\mathbb{A}) = NB_{v,k}(\mathbb{B})$.*

Доказательство леммы 3. Так как изоморфные GBS группы G и H имеют нетривиальные центры и представлены редуцированными графами с метками $\mathbb{A}_{inn}$ и $\mathbb{B}_{inn}$ соответственно, то существует [4, теорема 2.5] последовательность скольжений (индукций и $\mathcal{A}^{\pm 1}$ движений нет ввиду отсутствия нетривиальных модулей, см. [4]) преобразующая $\mathbb{A}_{inn}$ в $\mathbb{B}_{inn}$. Эта же последовательность применима к $\mathbb{A}$. Чтобы не вводить излишних обозначений переобозначим результат применения к $\mathbb{A}$ этой последовательности преобразований снова через $\mathbb{A}$. Эти соображения показывают, что в условиях леммы 3 можно считать, что $\mathbb{A}_{inn} = \mathbb{B}_{inn}$. При этом биекцию φ_V вершин этих графов с метками можно считать тождественной.

Здесь и далее в доказательстве этой леммы обозначим через $\langle\langle I_{\mathbb{A}_{v,k}}\rangle\rangle$ нормальное замыкание множества $I_{\mathbb{A}_{v,k}}$ в группе $\pi_1(\mathbb{A}_{v,k})$ (для $\mathbb{B}_{v,k}$ аналогично). Из копредставления следует, что

$$\pi_1(\mathbb{A}_{v,k})/\langle\langle I_{\mathbb{A}_{v,k}}\rangle\rangle \simeq \mathop{*}_{i=1}^{|V(\mathbb{A}_{v,k})|} \mathbb{Z}^{n-1} * F_{T_{v,k}(\mathbb{A})}.$$

Поэтому

$$rk\left(\pi_1(\mathbb{A}_{v,k})/\langle\langle I_{\mathbb{A}_{v,k}}\rangle\rangle\right) = (n-1)(NB_{v,k}(\mathbb{A}) + B_{v,k}(\mathbb{A})) + T_{v,k}(\mathbb{A}).$$

По условию леммы 3 существует изоморфизм централизаторов, а по лемме 2 это изоморфизм $\psi\colon \pi_1(\mathbb{A}_{v,k}) \to \pi_1(\mathbb{B}_{v,k})$. Это изоморфизм $GBS(n,1)$ групп, поэтому применимы результаты работы [3]. В частности, из леммы 3 [3] следует, что ψ отправляет элементы $I_{\mathbb{A}_{v,k}}$ в элементы сопряженные с $I_{\mathbb{B}_{v,k}}$. Получается, что отображение

$$\psi\colon \langle\langle I_{\mathbb{A}_{v,k}}\rangle\rangle \to \langle\langle I_{\mathbb{B}_{v,k}}\rangle\rangle$$

является изоморфизмом. Поэтому

$$\pi_1(\mathbb{A}_{v,k})/\langle\langle I_{\mathbb{A}_{v,k}}\rangle\rangle \simeq \pi_1(\mathbb{B}_{v,k})/\langle\langle I_{\mathbb{B}_{v,k}}\rangle\rangle.$$

Так как $\mathbb{A}_{v,k} \cap \mathbb{A}_{inn} = \mathbb{B}_{v,k} \cap \mathbb{B}_{inn}$, то $B_{v,k}(\mathbb{A}) = B_{v,k}(\mathbb{B})$ и $T_{v,k}(\mathbb{A}) = T_{v,k}(\mathbb{B})$. Если теперь сравнить ранги изоморфных фактор групп, то ясно, что $NB_{v,k}(\mathbb{A}) = NB_{v,k}(\mathbb{B})$. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если G_n и H_n изоморфны, то существование требуемых изоморфизмов вытекает из теоремы 1.

Пусть теперь соответствующие GBS группы G и H и упомянутые в формулировке теоремы 2 централизаторы изоморфны. Соображения приведенные в доказательстве леммы 3 показывают, что чтобы установить требуемый изоморфизм групп G_n и H_n достаточно показать, что для всякой вершины $v \in V_{inn}(\mathbb{A})$ и всякого ненулевого целого числа k число таких $(k, 1)$ рёбер из $E_{out}(\mathbb{A})$, которые можно скольжениями переместить в вершину v одинаково в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Для этого мы заметим, что если из вершины $v \in V_{inn}(\mathbb{A})$ выходит $(m, 1)$ ребро из $E_{out}(\mathbb{A})$, то $\langle v_1^m\rangle$ является центром некоторого Z-максимального подграфа в $\mathbb{A}$ (мы называем подграф графа с метками $\mathbb{A}$ Z-максимальным, если он максимальный с данным центром, это понятие оказалось полезно для описания централизаторов GBS групп [5, 6]). Более того, этот Z-максимальный подграф совпадает с $\mathbb{A}_{v,m}$ по определению $\mathbb{A}_{v,m}$.

Обозначим теперь через $\mathcal{Z}$ множество всех таких Z-максимальных подграфов у которых центры порождаются v_1^m так, что из вершины $v \in V_{inn}(\mathbb{A})$ выходит $(m, 1)$ ребро из $E_{out}(\mathbb{A})$. Тогда $\mathcal{Z}$ конечное ЧУМ.

Если $\mathbb{C} \in \mathcal{Z}$ и $Z(\pi_1(\mathbb{C})) = \langle v_1^m\rangle$, то будем обозначать множество ребер $E(\mathbb{C}) \cap E_{out}$ которые можно скольжениями переместить в вершину v и получится $(m, 1)$ ребро через $\varepsilon_{\mathbb{C}}$. Отметим, что ребра из $\varepsilon_{\mathbb{C}}$ можно переместить в любую вершину $\mathbb{C}$ и ни в какие другие вершины $\mathbb{A}$.

По лемме 3 мы знаем, что $NB_{v,k}(\mathbb{A}) = NB_{v,k}(\mathbb{B})$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать как, зная $NB_{v,k}(\mathbb{A})$ для всех $\mathbb{A}_{v,k}$, вычислить $|\varepsilon_{\mathbb{C}}|$ для всех $\mathbb{C} \in \mathcal{Z}$. Мы опишем процедуру которая вычисляет $|\varepsilon_{\mathbb{C}}|$ один за другим согласно расположению таких графов с метками в $\mathcal{Z}$. Стартуем с $\mathcal{Z}$.

Шаг процедуры. Выберем произвольный минимальный элемент в $\mathcal{Z}$ и обозначим его $\mathbb{C}$. Тогда $Z(\pi_1(\mathbb{C})) = \langle v_1^k\rangle$, все ребра из $\varepsilon_{\mathbb{C}}$ можно скольжениями переместить в вершину v и получится $|\varepsilon_{\mathbb{C}}|$ $(k, 1)$ ребер. Из-за минимальности $\mathbb{C}$ в $\mathcal{Z}$ количество рёбер которые можно переместить в вершину v и получатся $(m, 1)$ ребра $(m|k, m < k)$ уже вычислено на предыдущем шаге процедуры (на первом шаге таких рёбер нет из-за минимальности $\mathbb{C}$ в $\mathcal{Z}$). Отметим, что $NB_{v,k}(\mathbb{A})$ равно числу рёбер которые можно переместить в вершину v и получатся такие $(m, 1)$ ребра, что $m|k$. Теперь

$|\varepsilon_{\mathbb{C}}|$ получается как разность $NB_{v,k}(\mathbb{A})$ и найденных ранее таких $|\varepsilon_{\mathbb{D}}|$, что $\mathbb{D} \in \mathcal{Z}, v \in V(\mathbb{D}), \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}, \mathbb{D} \neq \mathbb{C}$. Теперь положим $\mathcal{Z} := \mathcal{Z} \setminus \mathbb{C}$ и запустим следующий шаг процедуры. Теорема 2 доказана.

Доказательство замечания 3. Из доказательства теоремы 2 видно, что для вершины $v \in V(\mathbb{A})$ достаточно требовать изоморфизм только тех централизаторов, которые соответствуют подграфам из $\mathcal{Z}$. Из конечности $\mathcal{Z}$ следует требуемое. Замечание 3 доказано.

Доказательство замечания 4. Алгоритм может быть разбит на следующие этапы:

Этап 0. По графам с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ строим соответствующие им приведённые графы с метками. Далее можно считать, что $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ приведённые графы с метками.

Этап 1. По графам с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ строим $\mathbb{A}_{inn}$ и $\mathbb{B}_{inn}$ отбрасывая висячие вершины из $V_{out}(\mathbb{A})$ и $V_{out}(\mathbb{B})$ соответственно. Проверяем изоморфны ли соответствующие GBS группы с помощью алгоритма из [4]. Если ответ ”нет”, то и наш алгоритм возвращает ответ ”нет” и останавливается. Иначе переходим на следующий этап.

Этап 2. Строим множества $\mathcal{Z}_{\mathbb{A}}$ и $\mathcal{Z}_{\mathbb{B}}$ для $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно. Для этого вычисляем центры всех связных подграфов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ и отбрасываем те подграфы для которых существуют строго содержащие их подграфы с тем же центром. Теперь ещё надо выбросить те подграфы у которых центр $\langle v_1^m \rangle$ не соответствует хоть одному ребру из E_{out} которое можно скольжениями переместить в некоторую вершину v из V_{inn} и получится $(m,1)$ ребро.

Этап 3. Для каждого графа из $\mathcal{Z}_{\mathbb{A}}$ и соответствующего графа из $\mathcal{Z}_{\mathbb{B}}$ сравниваем количество ребер из $E_{out}(\mathbb{A})$ которое можно скольжениями переместить в вершину v и получится $(m,1)$ ребро с аналогичным количеством ребер из $E_{out}(\mathbb{B})$ (соответственно их центрам). Если для всех пар эти количества совпадают, то алгоритм возвращает ответ ”да” и останавливается, иначе алгоритм возвращает ответ ”нет” и останавливается.

Список литературы

1. *Serre J.P. Trees.* Berlin/Heidelberg/New York:Springer, 1980.

2. *Дудкин Ф.А.* Групповые и алгоритмические свойства обобщенных групп Баумслага-Солитера // *Алгебра и логика.* 2022. Т. 61, № 3. С. 341 - 352.

3. *Dudkin F.A.* Necessary condition for isomorphism of $GBS(n,1)$ groups with non-trivial center // *SEMR.* 2025. V. 22, N 2. P. 1401-1407.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 22-32
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 22-32

4. *Clay M., Forester M.* On the isomorphism problem for generalized Baumslag–Solitar groups // *Algebraic & Geometric Topology.* 2008. N 8. P. 2289-2322.

5. *Дудкин Ф.А.* О централизаторной размерности обобщённых групп Баумслага-Солитера // *Алгебра и логика.* 2016. Т. 55, № 5. С. 611 - 615.

6. *Дудкин Ф.А.* О решётке централизаторов и централизаторной размерности обобщённых групп Баумслага–Солитера // *Сиб. матем. журн.* 2018. Т. 59, № 3. С. 514 - 528.

References

1. *Serre J.P. Trees.* Berlin/Heidelberg/New York:Springer, 1980.

2. *Dudkin F.A.* Group and Algorithmic Properties of Generalized Baumslag–Solitar Groups // *Algebra and Logic.* 2022. V. 61, N 3. P. 230-237.

3. *Dudkin F.A.* Necessary condition for isomorphism of $GBS(n,1)$ groups with non-trivial center // *SEMR.* 2025. V. 22, N 2. P. 1401-1407.

4. *Clay M., Forester M.* On the isomorphism problem for generalized Baumslag–Solitar groups // *Algebraic & Geometric Topology.* 2008. N 8. P. 2289-2322.

5. *Dudkin F.A.* The centralizer dimension of generalized Baumslag-Solitar groups // *Algebra and Logic.* 2016. V. 55, N 5. P. 403-406.

6. *Dudkin F.A.* On the centralizer dimension and lattice of generalized Baumslag–Solitar groups // *13. Sib. Math. J.* 2018. V. 59, N 3. P. 403-414.

Информация об авторе

Федор Анатольевич Дудкин, доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 8977-6300 AuthorID: 672111
Scopus Author ID 36147103600

Author Information

Fedor A. Dudkin, Doctor of Mathematics, Associate Professor

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 22-32
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 22-32

SPIN 8977-6300 AuthorID: 672111
Scopus Author ID 36147103600

*Статья поступила в редакцию 23.01.2026;
одобрена после рецензирования 12.02.2026; принята к публикации 06.05.2026*

*The article was submitted 23.01.2026;
approved after reviewing 12.02.2026; accepted for publication 06.05.2026*